Sur une propriété numérique de l'ensemble des axes de symétrie situés dans les plans de symétrie d'un polyèdre.

Par G. Cesàro.

Président de l'Académie royale de Belgique, Professeur de Cristallographie et Minéralogie à l'Université de Liége.

[Read January 26, 1915.]

Les axes de symétrie d'un polyèdre ne sont pas toujours situés tous dans ses plans de symétrie; ainsi, tandis que le cube a tous ses axes

$$3\,\Lambda^4, \quad 4\,\Lambda^3, \quad 6\,L^2$$

situés dans ses plans de symétrie, le rhomboèdre

$$\Lambda^3, \quad 3\,L^2$$

a son Λ^3 situé dans des plans de symétrie, tandis que les $3\,L^2$ ne sont pas situés dans ces plans.

Or, si l'on considère l'ensemble des axes situés dans les plans de symétrie,

$3\,\Lambda^4$,	$4\,\Lambda^3$,	$6\,L^2$	dans le premier cas,
	Λ^3		dans le second,

j'ai trouvé que le symbole obtenu possède une propriété numérique remarquable: 'Si l'on multiplie chaque coefficient (nombre d'axes de même ordre) par l'ordre de l'axe et par cet ordre diminué d'une unité, que l'on ajoute ces produits partiels, que l'on multiplie par 4 la somme, et que l'on ajoute une unité au résultat, on obtient toujours un carré parfait. En outre, en divisant par 2 la racine de ce carré augmentée d'une unité, le résultat représente le nombre total des plans de symétrie possédés par le polyèdre.'

Ainsi, pour le cube, on a

$$4\,(3\,.\,4\,.\,3 + 4\,.\,3\,.\,2 + 6\,.\,2\,.\,1) + 1 = 289 = 17^2,$$

et le nombre de plans de symétrie est

$$\frac{17+1}{2} = 9;$$

pour le rhomboèdre, on obtient

$$4\,(1\,.\,3\,.\,2) + 1 = 25 = 5^2,$$

et, pour le nombre de plans de symétrie,

$$\frac{5+1}{2} = 3.$$

Voici la démonstration de cette propriété :

THÉORÈME. *Si*

$$N\,.\,\Lambda^n, \qquad P\,.\,\Lambda^p, \qquad Q\,.\,\Lambda^q, \,\ldots$$

est l'ensemble des axes de symétrie qu'un polyèdre contient dans ses plans de symétrie, le nombre

$$4\,\{Nn\,(n-1) + Pp\,(p-1) + Qq\,(q-1) + \ldots\} + 1 = C^2$$

est un carré parfait, et le nombre de plans de symétrie que le polyèdre possède est

$$X = \frac{C+1}{2}\,.$$

En effet, si l'on considère un premier plan de symétrie et que l'on désigne respectivement par

$$N_1, \qquad P_1, \qquad Q_1, \,\ldots$$

les nombres de Λ^n, Λ^p, Λ^q, ... y contenus, j'ai démontré [1] que le nombre total de plans de symétrie du polyèdre est donné par la formule

$$X = 1 + N_1\,(n-1) + P_1\,(p-1) + Q_1\,(q-1) + \ldots .$$

La même formule, appliquée successivement à tous les autres plans de symétrie du polyèdre, donnera de même

$$X = 1 + N_2\,(n-1) + P_2\,(p-1) + Q_2\,(q-1) + \ldots$$
$$X = 1 + N_3\,(n-1) + P_3\,(p-1) + Q_3\,(q-1) + \ldots$$

. . . .

. . . .

En ajoutant membre à membre ces X équations il vient

$$X^2 = X + (n-1)\,\Sigma N_1 + (p-1)\,\Sigma P_1 + (q-1)\,\Sigma Q_1 + \ldots . \qquad (1)$$

Mais, dans la somme $N_1 + N_2 + \ldots$ chaque Λ^n se rencontre n fois, car on sait qu'il est situé à l'intersection de n plans de symétrie,[2] de sorte que

$$\Sigma N_1 = nN, \qquad \Sigma P_1 = pP, \,\ldots ;$$

donc, en posant

$$Nn\,(n-1) + Pp\,(p-1) + Qq\,(q-1) + \ldots = S,$$

[1] G. Cesàro, 'Des macles.' Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique, 1893, t. liii, p. 47.

[2] Par un Λ^n, ou bien il passe n plans de symétrie, ou bien il n'en passe aucun et, d'après l'énoncé, on se trouve ici dans le premier cas.

l'équation (1) devient

$$X^2 - X - S = 0.$$

On en tire

$$X = \frac{1 + \sqrt{4S+1}}{2}.$$

Comme X est un nombre rationnel, il s'ensuit que

$$4S+1 = C^2$$

est un carré parfait et que le nombre total de plans de symétrie est

$$X = \frac{C+1}{2}.$$

C'est la propriété qu'il fallait démontrer.

Exemples :

1° Considérons la combinaison axiale

$$3\,\Lambda^2, \qquad 4\,\Lambda^3. \tag{2}$$

(*a*) Si seulement les $3\,\Lambda^2$ se trouvent dans des plans de symétrie,

$$4S+1 = 4\,(3\,.\,2\,.\,1)+1 = 25$$

$$X = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Ce sont les polyèdres du groupe hexadiédrique

$$\begin{array}{ccc} C, & 3\,\Lambda^2, & 4\,\Lambda^3 \\ & 3\,\Pi & \end{array}$$

(*b*) Si les $4\,\Lambda^3$, et par conséquent les $3\,\Lambda^2$ aussi, se trouvent dans des plans de symétrie, la formule donnera le nombre maximum de plans de symétrie que peut présenter la combinaison axiale (2) :

$$4S+1 = 4\,(3\,.\,2\,.\,1 + 4\,.\,3\,.\,2) + 1 = 121$$

$$X = \frac{11+1}{2} = 6.$$

Ce sont les polyèdres du groupe tétraédrique

$$3\,\Lambda^2, \qquad 4\,\Lambda^3, \qquad 6\,P.$$

2° Considérons, en second lieu, la combinaison axiale

$$\Lambda^3, \qquad 3\,L^2. \tag{3}$$

(*a*) Si seulement le Λ^3 se trouve dans les plans de symétrie, on obtient par la formule les trois plans de symétrie qui passent par l'axe ternaire, et l'on arrive aux polyèdres du groupe rhomboédrique holoédrique

$$\begin{array}{ccc} C, & \Lambda^3, & 3\,L^2 \\ & & 3\,P. \end{array}$$

(*b*) Si tous les axes de symétrie se trouvent dans des plans de symétrie, la formule donnera le nombre maximum de plans de symétrie que peut posséder la combinaison axiale (3) :

$$4S+1 = 4(3.2+3.2.1)+1 = 49$$

$$X = \frac{7+1}{2} = 4.$$

On obtient la combinaison

$$\underset{\Pi}{\Lambda^3}, \quad 3L^2, \quad 3P'$$

réalisée, par exemple, dans le prisme régulier à base triangulaire.

Autre énoncé de la propriété. En examinant ce qui vient d'être dit, on aperçoit un autre énoncé, tout aussi intéressant que le premier, de la propriété dont nous nous occupons :

Comme toutes les combinaisons axiales possibles sont susceptibles de posséder des plans de symétrie passant par tous les axes de symétrie, il s'ensuit que la propriété

$$4S+1 = \text{carré parfait}$$

est une condition d'existence d'une combinaison axiale quelconque, c'est-à-dire que l'on peut énoncer :

Pour qu'une combinaison axiale

$$N.\Lambda^n, \quad P.\Lambda^p, \quad Q.\Lambda^q, \ldots$$

puisse exister, il faut qu'en désignant par S la somme

$$S = Nn(n-1) + Pp(p-1) + Qq(q-1) + \ldots$$

la quantité $4S+1$

soit un carré parfait. Le nombre maximum *de plans de symétrie que la combinaison axiale dont il s'agit peut posséder est donné par la formule*

$$X = \frac{\sqrt{4S+1}+1}{2}.$$

On peut transformer les expressions de S et X comme il suit : Si γ est le nombre de positions identiques en apparence que le polyèdre considéré peut occuper dans l'espace, k_n le nombre d'espèces d'axes simples λ^n, k_p le nombre d'espèces d'axes simples λ^p, etc., on sait que [1]

$$\gamma = \frac{2Nn}{k_n} = \frac{2Pp}{k_p} = \ldots,$$

[1] G. Cesàro, 'Des polyèdres qui peuvent occuper dans l'espace plusieurs positions identiques en apparence.' Mém. couronnés et Mém. des savants

de sorte que

$$S = \frac{\gamma}{2}\{(n-1)k_n + (p-1)k_p + \ldots\}$$

et

$$4S+1 = 2\gamma\Sigma(n-1)k_n + 1.$$

Donc: *Dans tout polyèdre, si l'on multiplie le nombre d'espèces d'axes simples d'un certain ordre par cet ordre diminué d'une unité, que l'on multiplie la somme de ces produits, obtenus pour tous les ordres, par le double du nombre de positions identiques en apparence que le polyèdre peut occuper dans l'espace, le résultat augmenté d'une unité donne un carré parfait.*

Le nombre maximum de plans de symétrie, que peut posséder la combinaison axiale considérée, est donc

$$X = \tfrac{1}{2}\{1 + \sqrt{2\gamma\Sigma(n-1)k_n + 1}\}.$$

Nombre maximum de plans de symétrie dans les trois classes de polyèdres. On sait que les polyèdres peuvent être rangés en trois classes, suivant qu'ils possèdent *trois* ordres d'axes, *deux* ou *un seul* ordre.[1]

1re *Classe.* Dans chaque ordre tous les axes sont de même espèce:

$$k_n = k_p = k_q = 1,$$
$$X = \tfrac{1}{2}\{1 + \sqrt{2\gamma(n+p+q-3)+1}\}.$$

2e *Classe.* Dans l'un des ordres les axes sont tous de même espèce, dans l'autre ils sont de deux espèces différentes:

$$k_n = 1, \quad k_p = 2,$$
$$X = \tfrac{1}{2}\{1 + \sqrt{2\gamma(n+2p-3)+1}\}.$$

3e *Classe.* On a: ou bien un axe unique hétéropolaire $\lambda^n\,\lambda'^n$, donc $k_n = 2$, $\gamma = n$ et par conséquent $X = n$; ou bien trois axes binaires perpendiculaires deux à deux:

$$(\lambda\lambda)^2, \quad (\lambda'\lambda')^2, \quad (\lambda''\lambda'')^2,$$

donc $k_n = 3$, $n = 2$, et comme $\gamma = 4$, $X = 3$.

étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique, 1893, t. liii, p. 13, Théor. VIII. — Il faut observer que dans le mémoire cité ci-dessus N représente le nombre total d'axes simples λ^n, nombre qui est double de celui des axes composés Λ^n, de sorte qu'avec la notation employée dans le présent mémoire le nombre total de λ^n est $2N$.

[1] Loc. cit., pp. 15 à 22. — Ce sont les *trois classes* de polyèdres *possédant des axes de symétrie*; une quatrième classe est celle des polyèdres sans axes de symétrie; ces derniers polyèdres ne peuvent évidemment posséder tout au plus qu'*un plan de symétrie*, car l'intersection de deux plans de symétrie donnerait un axe de symétrie.