ANNALEN

DER

PHYSIK.

NACH *L. W. GILBERTS* TODE FORTGESETZT

UND

HERAUSGEGEBEN

ZU

BERLIN

VON

J. C. POGGENDORFF.

VIER UND ACHTZIGSTER BAND.

NEBST DREI KUPFERTAFELN.

LEIPZIG
VERLAG VON JOH. AMBROSIUS BARTH
1826.

VII.

Ueber die Kryſtalliſation des Kupfervitriols, nebſt allgemeinen Betrachtungen über das ein- und eingliedrige oder tetartoprismatiſche Syſtem;

von

A. F. Kupffer, Profeſſor zu Kaſan.

(Beſchluſs.)

Die Rechtwinkligkeit der Axen, wenn ſie wirklich in der Natur überall Statt findet, wäre nicht nur ein ſehr merkwürdiger Umſtand, der die Aufmerkſamkeit der Mineralogen in hohem Grade verdiente; ſondern ſie machte auch die Rechnung ungleich einfacher, die im Gegentheil ziemlich verwickelt wird. Bei Rechtwinkligkeit der Axen nämlich ſtehen die Tangenten der Neigungswinkel aller Flächen, die in derſelben Zone liegen (d. h. deren Durchſchnittlinien einander parallel ſind), gegen eine Ebene, die man ſich durch zwei Axen gelegt denken kann, in rationalen und einfachen Verhältniſſen zu einander. Wir wollen dieſe Eigenſchaft *Tautometrie* nennen, und ohne uns in eine weitläufige Analyſe einzulaſſen, nur im Allgemeinen zeigen, in wiefern Tautometrie auch Rechtwinklichkeit der Axen vorausſetzt.

Es ſeyen *DC*, *AC* Fig. 6. Taf. I *) zwei Axen eines Kryſtalles, die ſich unter einem beliebigen Winkel λ ſchneiden; *DB*, *AD* ſeyen zwei Endkanten, ſo

*) Im vorigen Hefte befindlich. P.

dafs alfo, dem Gefetze aller Kryftallbildung zufolge, AB, AC in einem einfachen rationalen Verhältniffe ftehen. Wir wollen diefes Verhältnifs mit n bezeichnen, fo dafs $n \,.\, BC = AC$. Es feyen ferner $ADC = \gamma$, $BDC = \beta$, $BC = b$, $AC = c$, $DC = a$.

Nach einer der drei Grundformeln der ebenen Trigonometrie ift:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \lambda}{a - b \cos \lambda}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c \sin \lambda}{a - c \cos \lambda}$$

Beftimmt man a aus der zweiten Gleichung, fetzt feinen Werth in die erfte Gleichung, und fubftituirt zugleich nb für c, fo hat man:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{n + (n - 1) \cot \lambda \operatorname{tg} \gamma}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} = n + (n - 1) \cot \lambda \operatorname{tg} \gamma \quad . \quad . \quad (I)$$

Man ficht aus diefer Gleichung, dafs das Verhältnifs $\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta}$ einfach wird (oder dafs die Neigungen der Endkanten gegen die Axe tautometrifch werden) wenn $\cot \lambda = 0$, oder $\lambda = 90°$, oder wenn auch nur $\cot \lambda \,.\, \operatorname{tg} \gamma$ oder $\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \lambda}$ eine einfache Gröfse ift *). Und hieraus folgt wieder, dafs es nicht gerade nothwendig ift,

*) Hierin liegt auch der Beweis des oben angeführten Kennzeichens der tautometrifchen Bildungen im zwei- und ein-gliedrigen Syfteme; denn λ ift das Complement von a (Abweichung) zu 90°; die Producte der Tangenten oder Cotangenten der Neigung der Endkante gegen die Axe und der Abweichung müffen alfo einfache Gröfsen seyn.

die Axen rechtwinklig anzunehmen, um Tautometrie in den Neigungen der Endkanten zu haben; dafs im Gegentheil schiefe Axen zuweilen einfachere Verhältnisse hervorbringen können, als rechtwinklige — obgleich es gewifs ist, dafs wo Tautometrie ist, auch rechtwinklige Axen möglich sind: denn wenn die Tangenten der Neigungen der Endkanten gegen die Axe in einem einfachen Verhältnisse stehen, so wird eine Linie, die rechtwinklig mit der Axe ist, und die von den Endkanten geschnitten wird, in einfachen Verhältnissen von denselben geschnitten; diese Linie kann also als Axe dienen.

Bis jetzt ist nur vom zwei- und ein-gliedrigen Systeme die Rede gewesen, bei welchem immer zwei Axen einen rechten Winkel mit einander machen, nämlich die horizontalen Axen, oder die Diagonalen der Basis der schiefen Octaëder. Beim ein- und eingliedrigen Systeme ist auch die Basis der Säule schief, oder rhomboïdisch, und die Bildungen verlieren alle Symmetrie. Hier ist es also noch schwerer, rechtwinklige Axen aufzufinden, und es ist doppelte Vorsicht nöthig, wenn man entscheiden will, ob solche möglich sind.

Um einen Beitrag zu einer künftigen tieferen Bearbeitung dieses Gegenstandes zu liefern, habe ich die Winkel des Kupfervitriols gemessen. Die schönen Krystalle, die dieses Salz giebt, spiegeln auf ihren Flächen Gegenstände, die nicht gar zu weit entfernt sind, ziemlich deutlich ab, und sind deshalb zu Messungen mit dem Reflexionsgoniometer ziemlich geeignet. Meine Gegenstände waren zwei kleine schwarze Scheiben von Pappe, deren eine ich auf die Glasscheibe eines Fensters, die andere senkrecht darunter auf die Wand geklebt hatte; das Instrument stand an der dem Fenster gegenüberliegenden Wand meines Zimmers, in einer Entfernung von etwa 10 Schritten von den Gegenständen; in gröfserer Entfernung war die Coïncidenz der beiden Bilder nicht gut zu beobachten. Ich mafs ohne Fernrohr, nach der einfachen Methode der Coïncidenz des von der Fläche abgespiegelten ersten und des direct gesehenen zweiten Gegenstandes. Ich stellte das Instrument, vermöge der drei Schrauben, die an seinem Fufs angebracht sind, so lange, bis ein kleines schwarzes Glas mit parallelen Oberflächen, das ich auf das Gestelle des Goniometers, an die Stelle des Krystalls, geklebt hatte, die Bilder der beiden Gegenstände auf beiden Oberflächen nacheinander zur Coïncidenz brachte.

So fand ich folgende Winkel (siehe Fig. 7. Taf. I):

1)	Neigung von *M* zu *T*	= 123°	10'
2)	Neigung von *r* zu *M*	= 126	40
3)	Neigung von *r* zu *T*	= 110	10
4)	Neigung von *r* zu *n*	= 100	41
5)	Neigung von *r* zu *P*	= 103	27
6)	Neigung von *n* zu *P*	= 120	50½ (berechnet)
7)	Neigung von *P* zu *T*	= 127	40
8)	Neigung von *i* zu *r*	= 139	13½
9)	Neigung von *k* zu *n*	= 109	38½
10)	Neigung von *k* zu *r*	= 114	57
11)	Neigung von *s* zu *n*	= 92	26½
12)	Neigung von *s* zu *r*	= 139	43

Von diesen Flächen liegen

r, *M*, *n*, *T*

r, *i*, *P*

r, *n*, *k*, *s*

in derselben Zone.

Die meisten dieser Winkel sind an mehreren Krystallen gemessen worden, und es wurden unter mehreren diejenigen Resultate gewählt, die am besten untereinander übereinstimmten, besonders wenn sie sehr (um mehr als 5 bis 6′) von einander abwichen, so daſs nicht zu erwarten war, daſs ihr Mittel der Wahrheit sehr nahe kommen würde.

Um nun den Gang, den die Rechnung nehmen muſs, zu bezeichnen, denke man sich erst eine horizontale Ebene durch die Säule gelegt, die die Flächen *M*, *n*, *T* rechtwinklig schneidet. Die Flächen *M*, *T* werden auf dieser Ebene ein Rhomboïd abschneiden, welches Fig. 8 Taf. I. besonders abgebildet ist, und in welchem β dem Complement der Neigung von *T* zu *r*, γ dem Complement der Neigung von *M* zu *r*, und λ dem Complement der Neigung von *r* zu *n* zu 180° gleich ist. Nennt man nun die gröſsere Diagonale des Rhomboïds *b*, und die kleinere *a*, so ist offenbar:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin (\lambda + \beta)}$$

$$b = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\lambda - \gamma)}$$

oder

$$\frac{\sin \beta}{\sin (\lambda + \beta)} = \frac{\sin \gamma}{\sin (\lambda - \gamma)}$$

woraus man leicht folgende Formel findet:

$$\mathrm{tg}\, \lambda = \frac{2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta - \gamma)} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

welche dazu dient, λ aus β und γ zu finden.

Jetzt wollen wir uns vorstellen, *P* sey die Fläche eines schiefen Octaëders mit rhomboïdischer Basis (so kann man das ganz unregelmäſsige Octaëder nennen, welches dem ein- und eingliedrigen Systeme als allgemeine Grundform dienen kann); alsdann sind n und r offenbar Flächen, die die Ecken an der Basis des Octaëders so abstumpfen, dafs sie zugleich mit den Diagonalen der Basis und mit der Axe parallel sind. Man denke sich nun diese Flächen T, n, r (dasjenige r, welches bei T' liegt, und dem auf der Figur bezeichneten r parallel geht) hinlänglich verlängert, bis sie sich in einem Punkte schneiden; die Ecke, die dadurch gebildet wird, enthält alsdann die Winkel, die uns am meisten zu wissen nöthig sind. Es sey nämlich Fig. 9 Taf. I. das sphärische Dreieck, welches diese Ecke vorstellt *), so sind seine drei Winkel A, B, C die respectiven Neigungen der Flächen T, r, n; nämlich A die Neigung von P zu n, B die Neigung von P zu r, und C die Neigung von r zu n; und seine drei Seiten a, b, c sind die ebenen Winkel, die zwischen den Durchschnittslinien der Flächen P, r, n enthalten sind; a ist nämlich der ebene Winkel zwischen den Kanten $\frac{P}{r}$ und $\frac{r}{n}$; b der Winkel zwischen den Kanten $\frac{r}{n}$ und $\frac{T}{n}$; und c der Winkel zwischen den Kanten $\frac{P}{n}$ und $\frac{P}{r}$. Nun ist aber, wenn man die Neigung der

*) Wenn man den Durchschnittspunkt mehrerer Ebenen in den Mittelpunkt einer Kugel legt, so wird von diesen Ebenen auf der Oberfläche der Kugel ein sphärisches Vieleck abgeschnitten, dessen Winkel den Neigungswinkeln der Ebenen, dessen Seiten den ebenen Winkeln zwischen ihren Durchschnittslinien gleich sind; so dafs also zwischen den Winkeln und Seiten eines sphärischen Vielecks derselbe Zusammenhang Statt findet, als zwischen den Neigungs- und ebenen Winkeln, die in einer Ecke zusammenkommen.

vordern Endkante des Octaëders gegen die Axe mit r, und die Neigung der benachbarten Endkante rechts zur Seite (welche aus dem Durchschnitt zweier Octaëder-Flächen P, P, einer vordern und einer benachbarten hintern entsteht) gegen die Axe mit r' bezeichnet, offenbar $r = 180° - a$ und $r' = 180° - b$. Es gilt also nur, aus $A. B, C$, die uns durch Messung bekannt sind, a und b zu finden, um r und r' zu wissen. Nach einer bekannten Formel aus der sphärischen Trigonometrie hängen aber diese Gröfsen so zusammen:

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cos \frac{1}{2}(A-B+C)}{\sin B \,.\, \sin C}} = \sin \tfrac{1}{2} r$$

und eben so

$$\cos \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(B+A-C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin A \sin C}} = \sin \tfrac{1}{2} r'$$

Setzt man in diese Formeln, nach den obigen Messungen, $A = 120° \, 50'\frac{1}{2}$, $B = 103° \, 27'$ und $C = 79° \, 19'$, so findet man:

$$r = 54° \, 26'\tfrac{2}{3}$$
$$r' = 67° \, 8'\tfrac{1}{2}$$

Eben so kann man mit den Flächen k, r, n verfahren: man kann sich die Fläche k auch als die Fläche eines neuen schiefen Octaëders mit rhomboïdischer Basis denken, und, wie oben, die Neigungen der Endkanten dieses Octaëders gegen die Axe berechnen. Die Flächen k, n, r (dasjenige r, welches dem auf der Figur so bezeichneten parallel geht) bilden wieder eine Ecke, oder ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel A, B, C die Neigungen von k zu n, von k zu r und von n zu r, und dessen Seiten a, b die Complemente der Neigungswinkel der Endkanten des Octaëders gegen die Axe zu 180° sind, und welches vermöge der obigen Formeln ebenfalls aufgelöst werden kann. Wir haben hier nämlich $A = 109° 38'$, $B = 114° 57'$, $C = 100° 41'$, und finden

$$\varrho = 73° 11'$$
$$r' = 67° 8'$$

indem wir mit ϱ die Neigung der hintern Endkante gegen die Axe bezeichnen.

Verfährt man eben so mit den Flächen s, r, n, das heisst, setzt man in die obigen Formeln $A = 92° 26'$, $B = 139° 43'$, $C = 79° 19'$, so findet man

$$\varrho = 73° 10'\tfrac{1}{2}$$
$$\varrho' = 38° 16'\tfrac{1}{2}$$

indem man mit ϱ' die Neigung derjenigen Endkante, die aus dem Durchschnitt der Flächen i und s (dasjenige s, welches dem auf der Figur bezeichneten parallel geht) entsteht, bezeichnet.

Endlich kann man noch ϱ' aus den Neigungen der Flächen r, i, n berechnen. In dem sphärischem Dreiecke nämlich, welches die Flächen r, i, n bilden, sind uns die Neigungen von r zu i, von r zu n aus den Messungen, der ebene Winkel aber, der zwischen den Kanten $\frac{r}{i}$, $\frac{r}{n}$ liegt, aus der Rechnung bekannt: dieser letztere ist nämlich das Complement der Neigung r der vordern Endkante gegen die Axe zu 180°. Wir haben also zwei Winkel und die eingeschlossene Seite, $B = 139° 13'$, $C = 100° 41'$, und $a = 125° 33'\tfrac{1}{4}$; woraus es leicht ist, die dem Winkel B gegenüberliegende Seite b zu berechnen, nach der Formel:

$$\cot b = \frac{\cot a \,.\, \sin(\varphi + C)}{\sin \varphi}$$

worin $\operatorname{tg} \varphi = \cos a \operatorname{tg} B$.

b ist aber offenbar das Complement der Neigung der zwischen *s* und *i* liegenden Endkante gegen die Axe zu 180°, oder 180° — ϱ'. Man findet

$$\varrho = 38° 16'.$$

Diese Resultate stimmen so gut mit einander überein, dass ich weit entfernt bin, diese Uebereinstimmung bloss der Genauigkeit meiner Messungen zuzuschreiben, die in diesem Falle wirklich nicht sehr genau ausfallen konnten, wegen der Undeutlichkeit der Bilder, welche die Krystallflächen reflectirten. Die Messungen wichen, bei demselben Winkel, an verschiedenen Krystallen, zuweilen um 10′ und mehr von einander ab, so dass ich wohl einsah, dass selbst das Mittel aus vielen Beobachtungen kein sehr genaues Resultat geben konnte; ich schlug deshalb einen andern Weg ein, um genaue Resultate aus meinen Beobachtungen ziehen zu können; ich wählte unter vielen Beobachtungen diejenigen aus, die, bei einer vorläufigen Rechnung, am besten untereinander stimmten, und verwarf die übrigen ganz. Da ich aber bei denjenigen Beobachtungen stehen blieb, die mir zuerst diese Uebereinstimmung zeigten, so ist es wohl möglich, dass noch andere von den obigen etwas abweichende Beobachtungen eben so gut mit einander übereinstimmen, und dass ein künftiger Beobachter einige von den obigen Winkeln um 10′ oder 15′ grösser oder kleiner findet, ohne einen Fehler begangen zu haben. Besonders bin ich mit den Messungen der Winkel No. 10 und No. 11 nicht zufrieden; ich habe die Flächen *s* und *k* nur an einem Krystalle spiegelnd genug gefunden, um ihre Neigungen zu messen.

Die obigen Rechnungen geben uns alle Elemente, die uns zu wiſſen nöthig ſind, um alle Stücke des ſchiefen Octaëders mit rhomboïdiſcher Baſis, das dem Kupfervitriol als Grundform dienen kann, zu berechnen. Dieſes Octaëder nämlich wird von der Fläche *P*, *i*, *k*, *s* gebildet: von den Axen dieſes Octaëders geht eine vertical, die andere von *r* zu *r*, die dritte von *n* zu *n*; wir wollen die obere Hälfte der verticalen Axe mit *c* bezeichnen, die vordere Hälfte der Axe, die von *n* zu *n* geht, mit *a*, die hintere Hälfte mit $a_{,}$: von der Axe, die von *r* zu *r* geht, wollen wir die Hälfte, die unter *P* liegt, mit *b*, die andere Hälfte, die unter *i* liegt, mit $b_{,}$ bezeichnen. Wenn es nun erlaubt iſt, die Weissischen Zeichen auch auf ſchiefwinklige Axen zu beziehen, ſo bekommen die in der Figur aufgeſtellten Flächen folgende Zeichen:

P	=	$[a : b : c]$	n	=	$[a : \infty b : \infty c]$
i	=	$[a : b_{,} : c]$	u	=	$[a_{,} : \frac{3}{8}b : c]$
k	=	$[a_{,} : b : c]$	M	=	$[a : 3b_{,} : \infty c]$
s	=	$[a_{,} : b_{,} : c]$	T	=	$[a : 3b : \infty c]$
r	=	$[b : \infty a : \infty c]$			

Die Haüy'ſchen Zeichen ſind aus ſeinem eignen Werke zur Genüge bekannt.

Was die Winkel betrifft, die die Axen untereinander machen, ſo ſind dieſe leicht aus den Neigungen der Endkanten gegen die verticale Axe zu finden, nach der Formel (II). Man findet ſo aus $r = 54° \, 26'\frac{2}{3}$ und $\varrho = 73° \, 11'$, daſs die Neigung von *a* zu *c* $101° \, 39'\frac{1}{4}$ beträgt. Man findet eben ſo aus $r' = 67° \, 8'$ und $\varrho' = 58° \, 16'$, die Neigung von *b* zu *c* gleich $67° \, 4'\frac{1}{2}$. Legt man nun noch Ebenen durch a, c, durch b, c und durch a, b, so entsteht am Mittelpunkte des Krystalls eine Ecke, vom Durchschnitt dieser Ebenen gebildet, oder ein sphärisches Dreieck, in welchem zwei Seiten den eben gefundenen Winkeln, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel aber dem Complement der Neigung von r und n zu 180° gleich sind. Die diesem Winkel gegenüberliegende Seite ist dann die Neigung von b zu a, die wir noch zu suchen haben. Die hier anwendbare Formel aus der sphärischen Trigonometrie ist:

$$\cos a = \frac{\cos b \,.\, \sin(\varphi + c)}{\sin \varphi}$$

$$\text{worin} \quad \cot \varphi = \operatorname{tg} b \,.\, \cos A.$$

Hier ist $A = 79^\circ\ 19'$, $b = 67^\circ\ 4'\tfrac{1}{3}$, $c = 101^\circ\ 39'\tfrac{1}{4}$ zu setzen. Man findet so a oder die Neigung von a zu b gleich $84^\circ\ 55'\tfrac{1}{4}$.

Jetzt wollen wir noch die Neigungen der Octaëderflächen gegen die Ebenen, welche man sich durch die Axen gelegt denken kann, berechnen. Die Spitze der Octaëder wird durch zwei Ebenen, die man sich durch die Axen a, c und b, c gelegt denkt, in vier Ecken oder sphärische Dreiecke getheilt, in welchen uns folgende Stücke bekannt sind:

im ersten, als Seiten des sphärischen Dreiecks, r und r', und der zwischen ihnen eingeschlossene Winkel $79^\circ\ 19'$;

im zweiten, die Seiten r' und ϱ und der eingeschlossene Winkel $100^\circ\ 41'$;

im dritten, die Seiten ϱ und ϱ' und der eingeschlossene Winkel $79^\circ\ 19'$;

im vierten, die Seiten ϱ' und r und der eingeschlossene Winkel 100° 41'.

Es gilt also, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel jedes Dreiecks die beiden andern Winkel zu finden. Dazu kann uns die Formel:

$$\cot B = -\frac{\cot A \cos(\varphi + c)}{\cos\varphi}$$

$$\text{worin}\quad \cot\varphi = \operatorname{tg} b \,.\, \cos A$$

dienen, indem wir unter b und c die Seiten des Dreiecks, und unter A den eingeschlossenen Winkel verstehen, unter B aber den Winkel, der der Seite b gegenüber liegt — so wie sich überhaupt alle die bisher angegebenen Formeln aus der sphärischen Trigonometrie auf die Fig. 9. Taf. I. beziehen.

Man findet auf diese Weise

Neigung von P gegen eine Ebene, die durch a, c geht:	76° 33'
Neigung von P gegen eine Ebene, die durch b, c geht:	59° 9'½
Neigung von k gegen eine Ebene, die durch $a_{,,} c$ geht:	65° 3'
Neigung von k gegen eine Ebene, die durch $b_{,,} c$ geht:	70° 22'
Neigung von s gegen eine Ebene, die durch $a_{,,} c$ geht:	40° 17'
Neigung von s gegen eine Ebene, die durch $b_{,,} c$ geht:	87° 34'
Neigung von i gegen eine Ebene, die durch a, c geht:	40° 47'
Neigung von i gegen eine Ebene, die durch $b_{,,} c$ geht:	59° 5'½

Von diesen Winkeln kennen wir die sieben ersten schon aus der Beobachtung: es sind nämlich die Complemente der Neigungen der Flächen P, k, s, i gegen r und n zu 180°.

Eben so kann man die Neigungen der Flächen P, k, s, i gegen eine Ebene, die man durch die Axen a, b legt, finden. Man berechnet erst die Neigung der Ebene, die man sich durch a, b gelegt denkt, mit einer Ebene, die durch a, c geht (aus den drei Winkeln, die die Axen untereinander machen); man findet sie gleich 65° 19′; dann berechnet man die Winkel, die die Kanten an der Basis des schiefen Octaëders mit den horizontalen Axen machen, aus den Längen dieser Axen, und ihrem Winkel, welches eine Aufgabe aus der ebenen Trigonometrie ist: man findet so

Die Länge der Axe *a*, die der Axe *c* = 1 gesetzt		2,008 (2)
Die Länge der Axe *b*, die der Axe *c* = 1 gesetzt		1,2854 ($\frac{9}{7}$)
Die Neigung der vordern Basiskante gegen *b*	61°	1′$\frac{3}{8}$
Die Neigung derselben Basiskante gegen *a*	34	3$\frac{7}{8}$
Die Neigung der hintern Basiskante gegen *b*	53	48$\frac{11}{12}$
Die Neigung derselben Basiskante gegen *a*,	31	6$\frac{7}{12}$
Die Neigung der andern vordern Basiskante gegen *b*,	53	48$\frac{11}{12}$
Die Neigung derselben Basiskante gegen *a*	31	6$\frac{7}{12}$
Die Neigung der andern hintern Basiskante gegen *b*,	61	1$\frac{3}{8}$
Die Neigung derselben Basiskante gegen *a*,	34	3$\frac{3}{8}$

Und hieraus

Neigung von *P* gegen eine Ebene, die durch *a*, *b* geht	44° 43′
Neigung von *s* gegen eine Ebene, die durch *a*, *b* geht	33° 23′
Neigung von *i* gegen eine Ebene, die durch *a*, *b*, geht	30° 49′
Neigung von *k* gegen eine Ebene, die durch *a*, *b*, geht	56° 46′

Eben so leicht findet man:

Neigung der Säulenfläche (einer Fläche, die durch eine Basiskante, der verticalen Axe parallel, geht) gegen eine durch *a*, *c* gelegte Ebene	33° 39′$\frac{1}{2}$
Neigung der benachbarten Säulenfläche gegen dieselbe Ebene	25° 3$\frac{1}{2}$

Diese Werthe sind indessen zu klein, denn sie geben die Neigung von *M* zu *r* und von *T* zu *r* 127° 0′ und 110° 27′, da diese beiden Winkel doch nach den Messungen 126° 40′ und 110° 10′ sind.

Die Neigung von *u* gegen die Ebene, die durch

$a_{\prime}$, c geht, ist gleich 44° 37′; und gegen die Ebene, die durch b, c geht, 70° 38′.

Die Berechnung der Neigungen der secundären Flächen ist leicht, wenn man nur weiſs, in welche Zone sie fallen. Um z. B. die Neigung von u gegen eine Ebene zu finden, die durch $a_{\prime}$, c geht, denkt man sich erst eine Linie, die durch den Mittelpunkt des Octaëders geht, und senkrecht auf der Kante zwischen s und k steht. Diese Linie macht mit der Axe b einen Winkel λ, der aus der Formel (II) zu berechnen ist, in welcher β und γ die Neigungen der Flächen s, k gegen die Ebene, die durch $a_{\prime}$, c geht, bedeuten. Den Werth dieses Winkels λ nebst demjenigen der Neigung γ von k gegen dieselbe Ebene in der Formel (I) gesetzt, giebt den Werth von β, oder die Neigung von u gegen dieselbe Ebene, wobei man $n = \frac{5}{3}$ sezzen muſs.

Wenn man alle diese Winkel noch einmal übersieht, so findet man, daſs die Tangenten der Neigungen der verschiedenen Flächen gegen durch die Axen gelegte Ebenen keineswegs in einfachen Verhältnissen zu einander stehen, daſs also diese Flächen schwerlich auf rechtwinklige Axen zu beziehen sind. Wir haben also im Kupfervitriol das Beispiel einer Formenreihe, in welcher die Tautometrie mit der Symmetrie zugleich verschwunden ist. Das Studium mehrerer Formen dieser Art wird uns belehren, ob sich überhaupt Tautometrie ohne Symmetrie nicht findet: ob, wo die Axen zwei schiefe Winkel mit einander machen, der dritte immer auch schief ist: oder ob diese Eigenschaften bloſs einigen Substanzen zukommen. Besonders willkommen wäre in dieser Hinsicht die Bearbeitung des Axinits, dem Haüy ein gerades Prisma mit rhomboïdischer Basis (oder ein schiefes Octaëder mit rhombischer Basis) zur Grundform giebt.

* * *

Nachschrift an den Hrn. Herausgeber.

Da die vorstehende Abhandlung des Hrn. Prof. Kupfer durch meine Hand an Sie, mein hochgeehrtester Freund, gelangt, so glaube ich es nicht mit Stillschweigen übergehen zu können, dass, so lehrreich und des Verf. würdig sie auch ist, mich doch einige Stellen in der Einleitung befremdet haben, und mir eine Gegenbemerkung nöthig zu machen scheinen. „Alle krystallographischen Theorien, sagt der Verf., drehen sich um zwei Hauptpunkte, um die Wahl der Grundform, und um die Ableitung der secundären Flächen aus denselben.“ Den ersten Theil dieses Satzes kann ich nicht zugeben; ich glaube vielmehr schon in dem Bande der Schriften der hiesigen Akad. d. Wiss. für 1816 und 17, S. 236—240 gezeigt zu haben, dass die Wahl einer Grundform etwas sehr willkürliches und precäres ist, wie sie sich denn gerade in diesem Lichte in allen neuern Bearbeitungen zeigt; dagegen sie in meiner Methode, die Hr. Prof. K. so gut kennt, jederzeit in ein Verhältniss von Linearrichtungen unter sich aufgelöst werden muss, um, mit Weglassung der Fictionen, die Natur reiner und hypothesenfreier darzustellen.

„Dabei darf das Grundgesetz aller krystallinischen Bildung, fährt Hr. K. fort, nicht aus den Augen gelassen werden, dass nämlich die secundären Flächen die Seitenlinien der Grundform in rationalen Verhältnissen schneiden. Dieser Grundsatz ist zuerst von Haüy an der Natur selbst erwiesen worden — —. Haüy ist auch der einzige gewesen, der eine Erklärung dieser merkwürdigen Erscheinung gegeben hat — —. Alle spätern krystallographischen Theorien — — sind nur Ansichten, die diesen von Haüy erwiesenen Grundsatz schon stillschweigend in sich fassen, und keineswegs dazu dienen sollen, ihn von Neuem zu beweisen, sondern ihn durch neue Beobachtungen zu bestätigen."

Hier ist manches zu erinnern. Der Grundsatz, von welchem die Rede ist, daſs irgend gegebene krystallographische Linien eines Systems von jeder abgeleiteteren Fläche desselben in rationellen Verhältnissen getheilt werden, war bei Haüy, in so weit er von ihm ausgesprochen worden, lediglich *Annahme*, oder die unmittelbare Folge seiner atomistischen Hypothese von den Decrescenzen, identisch mit dieser selbst. Einen *Beweis* desselben könnte man aus Haüy nur durch eine petitio principii finden. *Nachweisen* in der Natur, daſs es so sey, d. i. es glaublich machen durch einige unter den einfacheren gewählte Beispiele, wo die Hypothese sehr gut mit dem, was sich beobachten läſst, übereinstimmt, und dem etwanigen Gegner überlassen, die Vermuthung, daſs es überall so sey, zu entkräften, dieſs ist wohl noch weit entfernt, die Hypothese zum erwiesenen Grundsatz zu machen. Wenn aber wirklich ein *Beweis* dieses wichtigen Grundsatzes gegeben worden ist, so ist es durch die *Zonenlehre* geschehen, diese Fundamentallehre für die ganze speciellere Krystallographie.

Ich kann daher diesen Aeuſserungen des Hrn. Prof. K. nur in sofern beitreten, als sie sich auf die Mohs'sche Darstellung zu beziehen scheinen; denn in den *Reihen* des Hrn. Mohs etwa einen Beweis unseres Grundsatzes zu suchen, wäre die nämliche petitio principii. Diese Reihen haben in sich keine Bürgschaft; so weit ihnen aber Wahrheit zukommt, erhalten sie dieselbe durch das Gesetz der *Zonen*, und sind in diesem schon enthalten.

Weiſs.